РОЗМІЩЕННЯ ПРЯМИХ ТА ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ

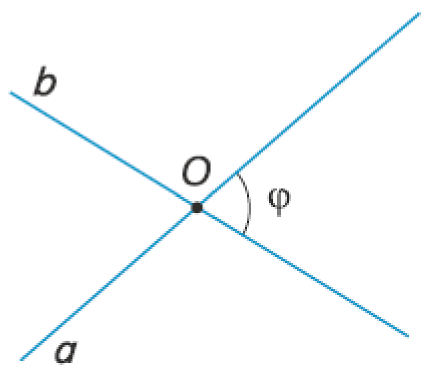
10 КЛАС

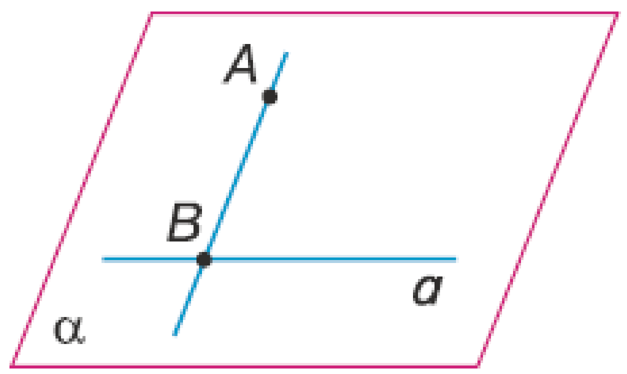
ГЕОМЕТРІЯ

ПРЯМІ, ЩО ПЕРЕТИНАЮТЬСЯ

Якщо дві прямі мають спільну точку, то вони перетинаються у цій точці

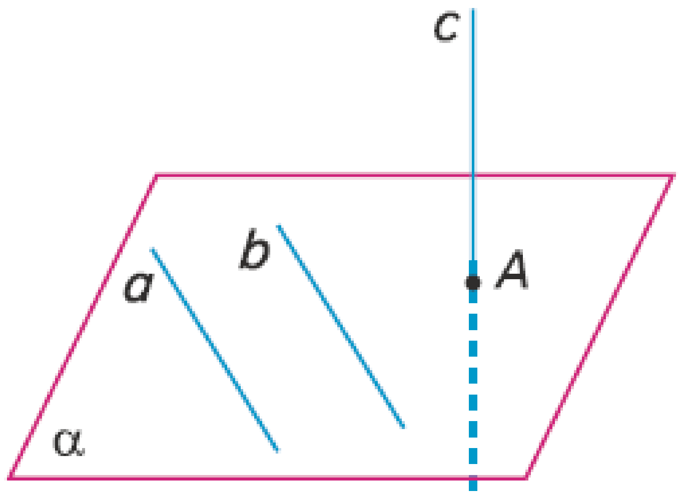
Якщо дві прямі перетинаються, то вони лежать у одній площині





ПАРАЛЕЛЬНІ ПРЯМІ

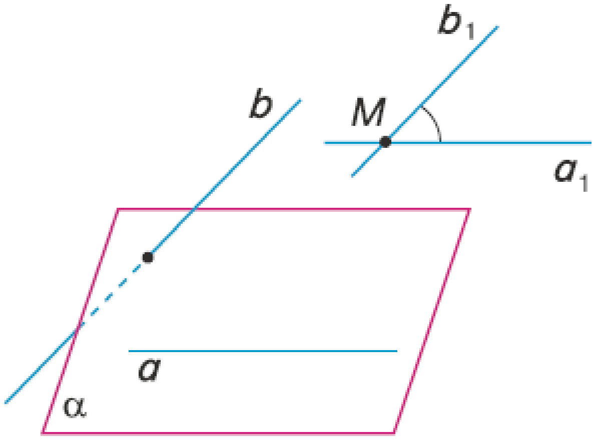
Прямі, що лежать у одній площині і не мають спільних точок, називаються *паралельними*



МИМОБІЖНІ ПРЯМІ

Прямі у просторі, що не лежать в одній площині, називаються *мимобіжними*

***Кутом між мимобіжними прямими* називається кут між прямими, що перетинаються і паралельні даним мимобіжним прямим**



Усі вершини ромба *ABCD* лежать у площині *α.* Пряма *m* паралельна прямій *AB*. Укажіть можливе взаємне розташування прямої *m* і площини *α:*

а) пряма *m* може належати площині *α* або перетинати її, пряма не може бути паралельною площині;

б)пряма *m* може належати площині *α*, пряма не може перетинати площину *α* або бути паралельною площині *α*;

в)пряма *m* може належати площині *α* або бути паралельною площині *α*, пряма не може перетинати площину *α*;

Г) пряма *m* може належати площині *α*, бути паралельною площині *α* або перетинати площину *α*.

ОЗНАКА МИМОБІЖНИХ ПРЯМИХ

Теорема 29.2 (ознака мимобіжних прямих). ***Якщо одна з двох прямих лежить у площині, а друга перетинає цю площину в точці, яка не належить першій прямій, то дані прямі є мимобіжними*** (рис. 29.6).

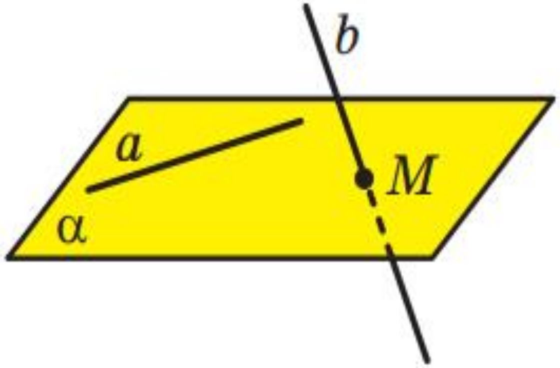


Рис. 29.6

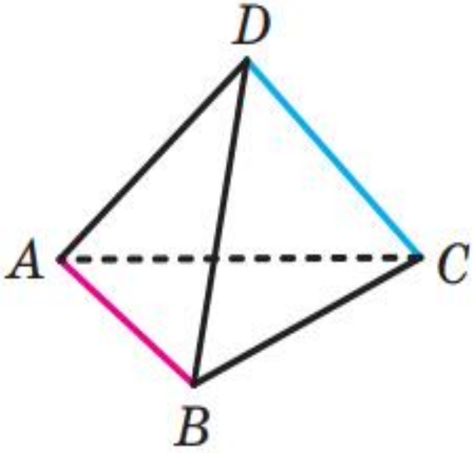


Рис. 29.7

Прямі *a* і *b* паралельні в просторі, пряма *c* перетинає пряму *a*. Укажіть правильне твердження про можливе розташування прямих :

а) прямі *b* і *c* можуть бути паралельними, не можуть бути мимобіжними або перетинатися;

б) прямі *b* і *c* можуть перетинатися, не можуть бути паралельними або мимобіжними.

в)прямі *b* і *c* можуть бути мимобіжними, не можуть бути паралельними або перетинатися;

г) прямі *b* і *c* можуть перетинатися або бути мимобіжними, не можуть бути паралельними.

КУТ МІЖ МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

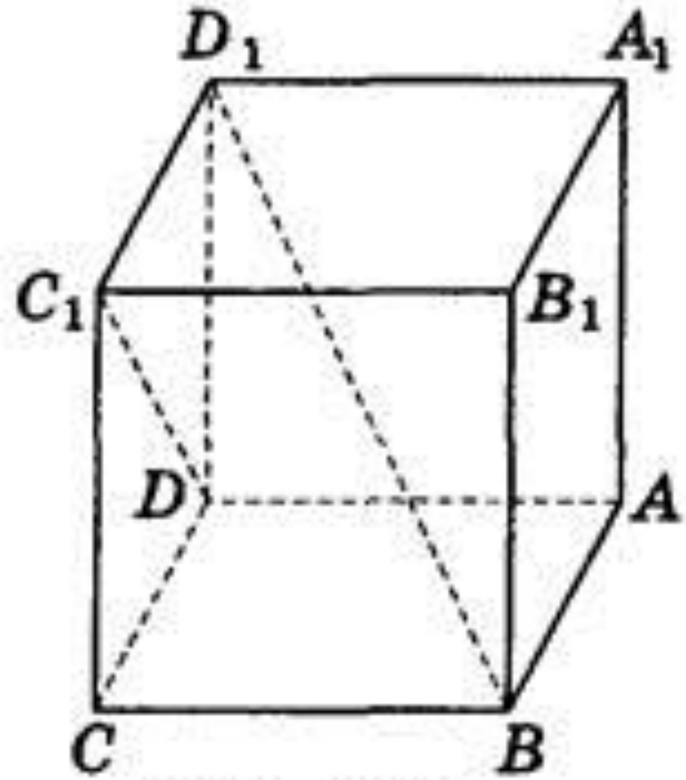


Рис. 276

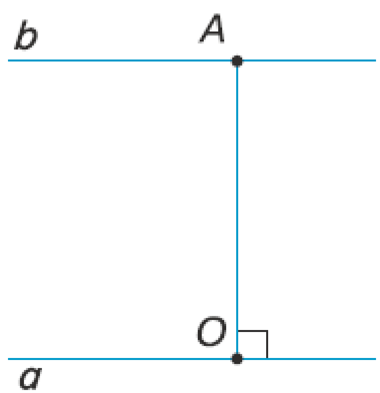
Знайти кут між C_1D BA_1

Знайти кут між D_1B B_1A_1

Знайти кути трикутника ACD_1 B_1C_1A;

ВІДСТАНЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ТА МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

Відстанню між паралельними прямими називається довжина перпендикуляра, проведеного з будь-якої точки однієї прямої до другої прямої.



ВІДСТАНЬ МІЖ ПАРАЛЕЛЬНИМИ ТА МИМОБІЖНИМИ ПРЯМИМИ

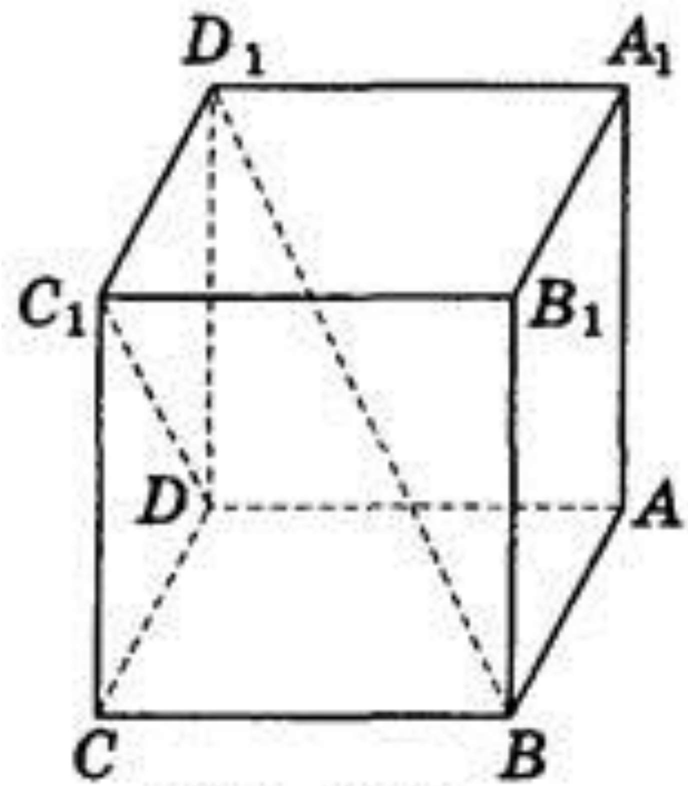


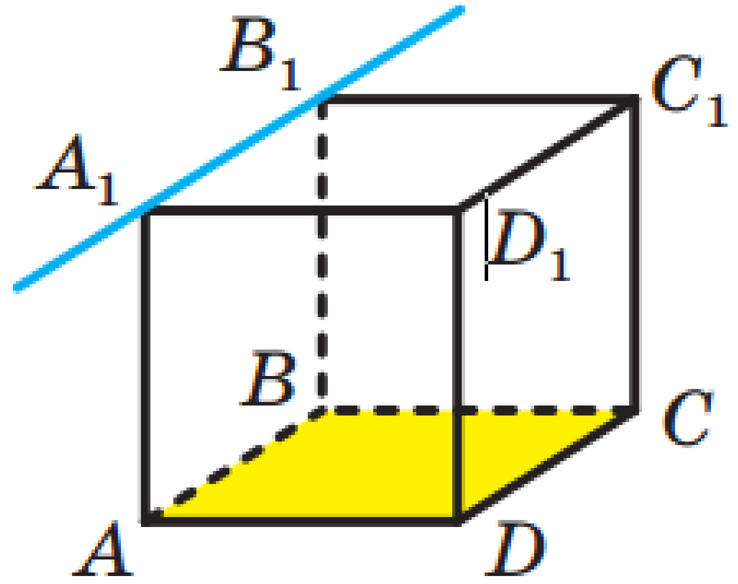
Рис. 276

Знайти відстань між прямими AB та C_1D_1

Знайти відстань між прямими A_1D та CB_1

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Означення. Пряму та площину називають **паралельними**, якщо вони не мають спільних точок.



ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Теорема 30.1 (ознака паралельності прямої та площини). ***Якщо пряма, яка не належить даній площині, паралельна якій-небудь прямій, що лежить у цій площині, то дана пряма паралельна самій площині.***

Теорема 30.2. ***Якщо площина проходить через дану пряму, паралельну другій площині, та перетинає цю площину, то пряма перетину площин паралельна даній прямій.***

На рисунку 30.4 пряма a паралельна площині α. Площина β проходить через пряму a і перетинає площину α по прямій b. Тоді $b \parallel a$.

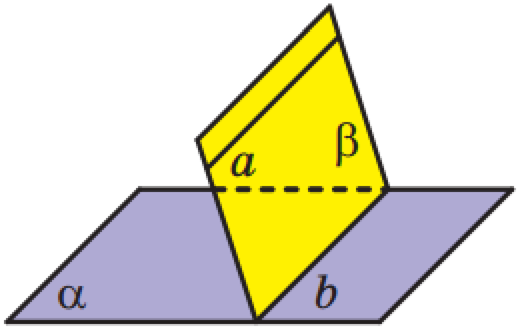


Рис. 30.4

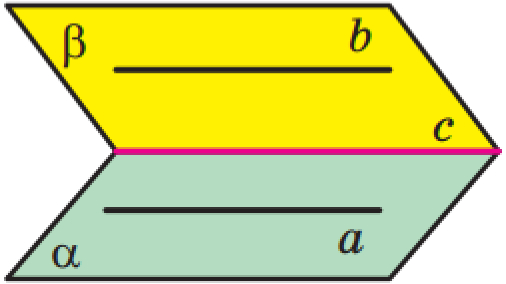


Рис. 30.5

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Теорема 5.3. ***Якщо через кожну з двох паралельних прямих проведено площину, причому ці площини перетинаються по прямій, відмінній від двох даних, то ця пряма паралельна кожній із двох даних прямих.***

Доведення. Нехай дано прямі a і b та площини α і β такі, що $a \parallel b$, $a \subset \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = c$ (рис. 5.6). Доведемо, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$.

Оскільки $a \parallel b$ і $b \subset \beta$, то за ознакою паралельності прямої та площини отримуємо, що $a \parallel \beta$. Через пряму a проходить площина α, яка перетинає площину β по прямій c. Тоді за теоремою 5.2 отримуємо, що $a \parallel c$. Аналогічно можна довести, що $b \parallel c$. ◄

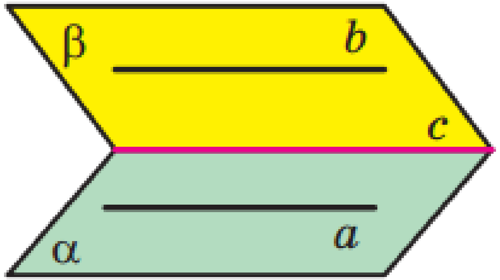


Рис. 5.6

Пряма *a* паралельна площині *β*, а пряма *b* належить площині *β*. Укажіть можливе взаємне розташування прямих *a* і *b*:

а) прямі *a* і *b* можуть бути паралельними, не можуть бути мимобіжними або перетинатися;

б) прямі *a* і *b* можуть бути мимобіжними, не можуть бути паралельними або перетинатися;

в) прямі *a* і *b* можуть перетинатися, не можуть бути паралельними або мимобіжними;

г) прямі *a* і *b* можуть бути паралельними або мимобіжними, не можуть перетинатися.

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПРЯМОЇ ТА ПЛОЩИНИ

Теорема 30.4. ***Дві прямі, паралельні третій прямій, паралельні між собою.***

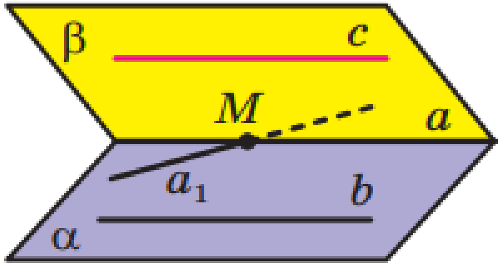


Рис. 5.7

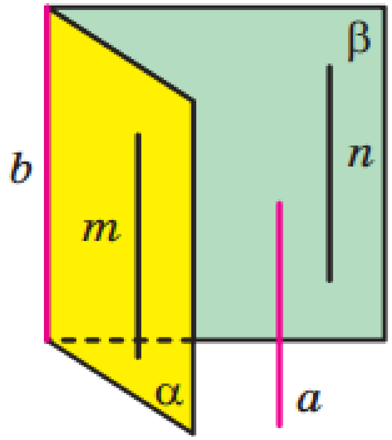
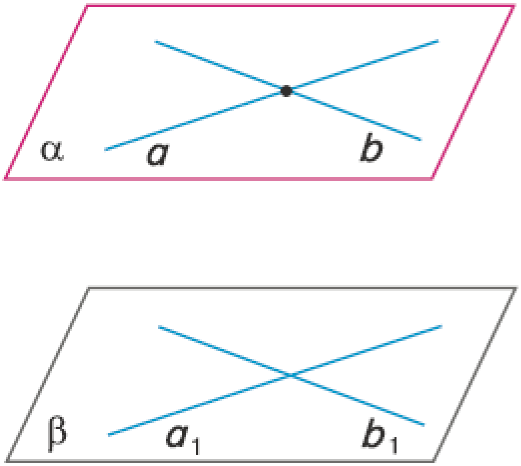


Рис. 5.8

Задача 1. Доведіть, що коли пряма паралельна кожній із двох площин, які перетинаються, то вона паралельна прямій їхнього перетину.

ПАРАЛЕЛЬНІСТЬ ПЛОЩИН

Теорема (ознака паралельності площин).
Якщо дві прямі, що перетинаються, однієї площини відповідно паралельні двом прямим другої площини, то ці площини паралельні.



Площини *α* і *β* перетинаються по прямій *m*. Пряма *a* належить площині *α*. Укажіть можливе взаємне розташування прямих *a* і *m* :

а) прямі *a* і *m* можуть перетинатися, не можуть бути паралельними або мимобіжними;

б) прямі *a* і *m* не можуть бути паралельними, не можуть бути мимобіжними або перетинатися;

в) прямі *a* і *m* можуть бути мимобіжним, не можуть бути паралельними або перетинатися;

г) прямі *a* і *m* можуть перетинатися або бути паралельними, не можуть бути мимобіжними.

ВЛАСТИВОСТІ

Теорема 31.2. ***Через точку в просторі, яка не належить даній площині, проходить площина, паралельна даній площині, і до того ж тільки одна*** (рис. 31.4).

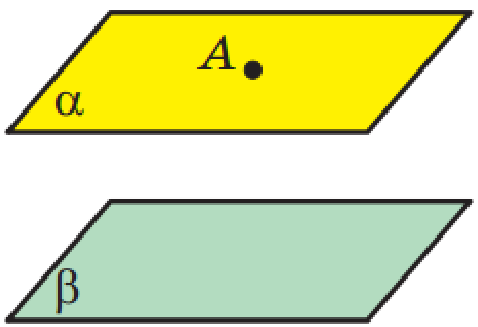


Рис. 31.4

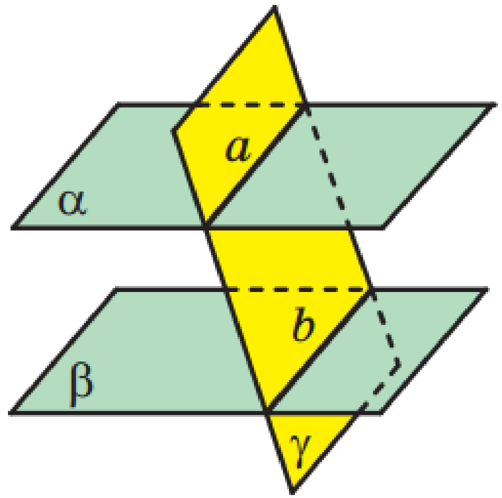


Рис. 31.5

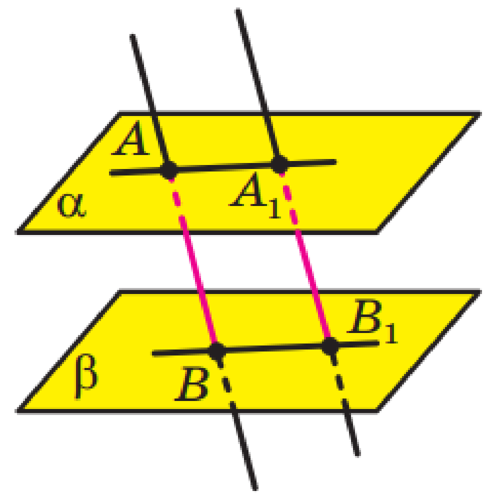


Рис. 31.6

Теорема 31.3. ***Прямі перетину двох паралельних площин третьою площиною паралельні*** (рис. 31.5).

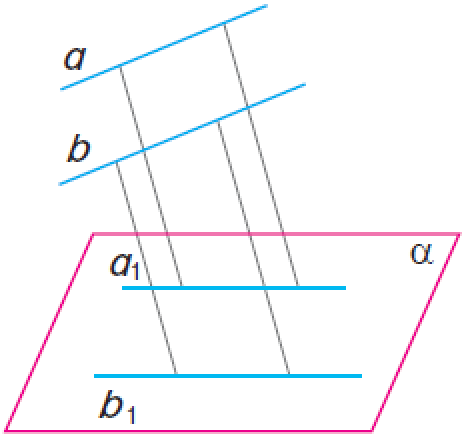
Задача. Доведіть, що відрізки паралельних прямих, які містяться між паралельними площинами, рівні.

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

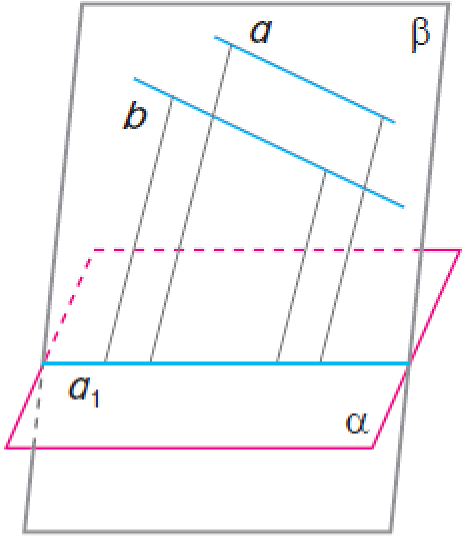
1. Паралельною проекцією точки є точка.

2. Паралельною проекцією прямої є пряма.

3. Проекції паралельних прямих паралельні між собою (мал. 157) або збігаються, якщо дані прямі лежать у площині, паралельній напряму проектування (мал. 158).



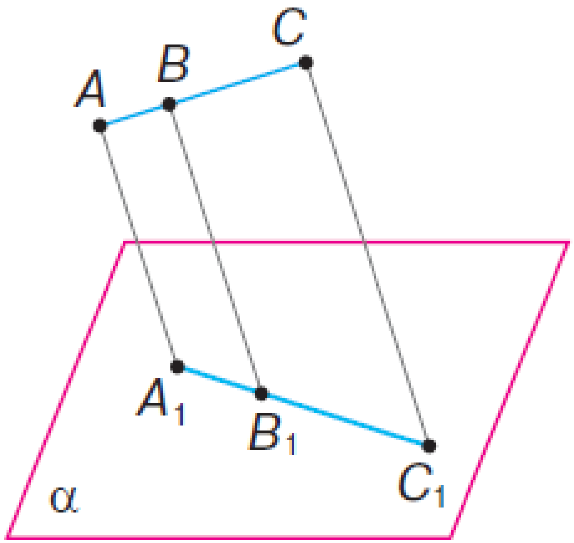
Мал. 157



Мал. 158

ПАРАЛЕЛЬНЕ ПРОЕКТУВАННЯ

4. Якщо відрізки лежать на одній прямій або на паралельних прямих, то відношення їх проекцій дорівнює відношенню самих відрізків (мал. 159).



$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} = \frac{1}{2}$$

Мал. 159